

2 Elemente der Darstellungstheorie von Lie-Algebren

2.1 Definitionen und Beispiele

2.1.1 Motivation

Lie-Algebren tragen ihren Namen nach dem norwegischen Mathematiker Sophus Lie (1842-1899), der die von ihm betrachteten kontinuierlichen und diskreten Symmetrien zunächst vor allem zur Untersuchung partieller Differentialgleichungen verwendet hat. Um diese stetigen Transformationsgruppen (die heutigen Lie-Gruppen) anzuwenden zu können, linearisierte er die Transformationen und untersuchte die infinitesimalen Erzeugenden. Die Verknüpfungseigenschaften der Lie-Gruppe können durch Kommutatoren der Erzeugenden ausgedrückt werden; die Kommutator-Algebra der Erzeugenden heißt heute Lie-Algebra.

Lie-Gruppen treten an vielen Stellen im Rahmen der modernen Physik auf. Neben der klassischen Drehimpulsalgebra ist zum Beispiel die interne Eichgruppe des Standardmodells ($SU(3) \times SU(2) \times U(1)$) das Produkt mehrerer Lie-Gruppen. Größere Eichgruppen treten im Kontext verallgemeinerter (höherdimensionaler) Eichtheorien auf, mit denen man hofft, das Standardmodell mit der in ihm noch nicht enthaltenen Gravitation in Einklang zu bringen.

In der Quantenmechanik ist man an Gruppen unitärer Operatoren interessiert, die auf dem Vektorraum der Quantenzustände wirken. Aufgrund der Nichtkommutativität der Operatoren sind diese Gruppen Lie-Gruppen. Dabei liegt der Schwerpunkt auf stetig erzeugten Gruppen, also denen, deren Elemente durch wiederholte infinitesimale Transformation erzeugt werden können.

2.1.2 Definitionen

Definition: Ein *Körper* ist ein kommutativer unitärer Ring (nicht der Nullring), bei dem jedes von Null verschiedene Element multiplikativ invertierbar ist.

Alternative Definition: Ein *Körper* ist eine Menge von Objekten mit zwei binären Verknüpfungen $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- Kommutativität und Assoziativität, Existenz eines neutralen Elementes und des Inversen bezüglich der Operationen $(+)$ und (\cdot) .
- Links-Distributivität: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Die Rechts-Distributivität folgt aus den vorherigen Bedingungen.)
- Existenz genau eines Elementes ohne Kehrwert (0) und eines Einselementes (1) .

Definition: Eine *Algebra* \mathfrak{a} über einem Körper \mathbb{K} ist ein k -Vektorraum mit einer k -bilinearen und assoziativen Verknüpfung: $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$.

Definition: Eine *Lie-Algebra* ist ein Vektorraum \mathfrak{g} über einem Körper \mathbb{K} zusammen mit einer bilinearen (2), antisymmetrischen (3) Verknüpfung, die die Jacobi-Identität (4) erfüllt:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (x, y) &\longmapsto [x, y]. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Verknüpfung heißt Lie-Klammer. Im einzelnen bedeutet dies, daß $\forall a, b, c \in \mathfrak{g}$ und $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

$$[\alpha a + \beta b, c] = \alpha [a, c] + \beta [b, c] \tag{2}$$

$$[a, b] = -[b, a] \tag{3}$$

$$[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0. \tag{4}$$

Daraus folgt sofort: $[a, a] = 0 \quad \forall a \in \mathfrak{g}$.

Definition: Eine *Lie-Gruppe* G ist eine glatte reelle oder komplexe Mannigfaltigkeit M , die zusätzlich die Struktur einer Gruppe besitzt, wobei die Gruppenverknüpfung und die Inversion beliebig oft differenzierbar sein müssen.

Jedes Gruppenelement $g \in G$ bewirkt durch Multiplikation von links oder rechts eine invertierbare Selbstabbildung der Gruppe

$$L_g : h \mapsto gh, \quad R_g : h \mapsto hg \quad (5)$$

Hintereinander ausgeführt genügen L_g und $R_{g^{-1}}$ derselben Gruppenverknüpfung wie die Gruppenelemente

$$L_{g_2} \circ L_{g_1} = L_{g_2 g_1}, \quad R_{(g_2)^{-1}} \circ R_{(g_1)^{-1}} = R_{(g_2 g_1)^{-1}}. \quad (6)$$

Die Linksmultiplikation vertauscht mit der Rechtsmultiplikation

$$L_{g_2} \circ R_{g_1} = R_{g_1} \circ L_{g_2}. \quad (7)$$

Folglich genügt auch die adjungierte Abbildung (genaue Definition später) $\mathbf{Ad}_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$

$$\mathbf{Ad}_g : h \mapsto ghg^{-1} \quad (8)$$

der Gruppenverknüpfung $\mathbf{Ad}_{g_2} \mathbf{Ad}_{g_1} = \mathbf{Ad}_{g_2 g_1}$.

Korollar: Die Lie-Algebra \mathfrak{g} ist unter der Lie-Klammer abgeschlossen und isomorph zum Tangentialraum $T_e M$ am neutralen Element e von G .

Sei $\Gamma : s \mapsto k(s)$ in der Gruppe G eine Kurve, die für $s = 0$ das Einselement e durchläuft. Ihr Tangentialvektor am Einselement $\delta|_e$ heißt infinitesimale Transformation. Die Kurve wird durch Linksmultiplikation auf Kurven $\Gamma_h = L_h \Gamma : s \mapsto hk(s)$ abgebildet, die mit ihrer Ableitung nach s bei $s = 0$ an jedem Punkt h einen Tangentialvektor $\delta|_h$ definieren. Das Vektorfeld δ , das durch Linksmultiplikation aus einem Vektor am Einselement entsteht, ist invariant unter Linksmultiplikation (linksinvariant). Denn die durch Linksmultiplikation verschleppte Kurve $L_g \Gamma_h$ stimmt mit Γ_{gh} überein.

Sind zwei Vektorfelder u und v linksinvariant, so ist auch ihr Kommutator linksinvariant, denn für jede Transformation $y \mapsto y'$ von Punkten der Mannigfaltigkeit ist der Kommutator der transformierten Vektorfelder u' und v' das Transformierte des Kommutators der ursprünglichen Vektorfelder $[u', v'] = ([u, v])'$. Also bilden die linksinvarianten Vektorfelder eine Liealgebra.

Die linksinvarianten Vektorfelder bilden einen Vektorraum mit derselben Dimension $\dim(G)$ wie die Gruppe G , denn durch das Einselement gibt es $\dim(G)$ Kurven Γ mit linear unabhängigen Tangentialvektoren und zugehörigen linksinvarianten Vektorfeldern und umgekehrt ist ein Vektorfeld auf der ganzen Gruppe durch die geforderte Linksinvarianz festgelegt, wenn es an einem Punkt gewählt ist.

Ist diese Dimension endlich, so ist die unterliegende Mannigfaltigkeit automatisch analytisch und die Gruppenmultiplikation und Inversion sind analytische Funktionen.

Korollar: Die Vektorfelder auf einer glatten Mannigfaltigkeit M bilden zusammen mit der Lie-Klammer eine (unendlich-dimensionale) Lie-Algebra \mathfrak{g} . Die zur Lie-Gruppe G gehörende Lie-Algebra \mathfrak{g} besteht aus dem Unterraum der linksinvarianten Vektorfelder auf G .

Beispiel: Der Vektorraum \mathbb{R}^3 ist mit der Vektoraddition als Gruppenoperation eine Lie-Gruppe. Die Vektorfelder auf dem \mathbb{R}^3 bilden zusammen mit dem Kreuzprodukt als bilinearer Verknüpfung eine Lie-Algebra.

Notation: Lie-Gruppen: $SO(n), SU(n), GL(n, \mathbb{R})$, Lie-Algebren: $\mathfrak{so}(n), \mathfrak{su}(n), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$

Korollar: Die Elemente der Lie-Algebra \mathfrak{g} sind die Erzeuger der Gruppe G . Die Relation ist wie folgt:

$$\begin{aligned} f: \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ f: g &\mapsto \exp g. \end{aligned} \tag{9}$$

Im folgenden sollen nur stetige Gruppen betrachtet werden. Das sind diejenigen Gruppen, für die sich jedes Element aus Hintereinanderausführung infinitesimaler Transformationen erzeugen läßt. Eine infinitesimale Transformation ist hierbei durch

$$g(\alpha) = 1 + \alpha^a t_a + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad g \in \mathfrak{g} \tag{10}$$

gegeben.

Definition: Eine Darstellung \mathcal{D} einer Lie-Algebra \mathfrak{g} ist ein Homomorphismus von \mathfrak{g} in die Automorphismengruppe $\text{Aut}(W)$ eines Vektorraumes W .

$$g \mapsto \mathcal{D}(g) \text{ mit } \mathcal{D}(g) \in W, \quad g \in \mathfrak{g} \tag{11}$$

Die Gruppenverknüpfung in \mathfrak{g} entspricht der Hintereinanderausführung von Automorphismen in W : $\mathcal{D}(gh) = \mathcal{D}(g)\mathcal{D}(h) \quad \forall g, h \in \mathfrak{g}$.

Definition: Eine Darstellung \mathcal{D} heißt *irreduzibel*, wenn es keine nichttrivialen Unterdarstellungen gibt. Das ist analog zu folgender Aussage: eine Darstellung heißt irreduzibel, wenn es keinen invarianten nichttrivialen Unterraum zum Vektorraum V , auf den die Darstellung wirkt, gibt.

Satz: Schurs Lemma: Gilt für eine irreduzible Darstellung \mathcal{D} , die auf den Vektorraum V wirkt, und ein linearer Selbstabbildung $A: V \rightarrow V$, die einen Eigenvektor besitzt, daß $\mathcal{D}(g)A = A\mathcal{D}(g)$, so ist $A = \lambda \mathbf{1}$.

Jede lineare Selbstabbildung eines endlichdimensionalen, komplexen Vektorraumes und alle reellen symmetrischen Matrizen besitzen einen Eigenvektor.

2.1.3 Eigenschaften von Lie-Algebren

Im folgenden werden sowohl Elemente der Lie-Algebra verwendet, als auch (später) Darstellungen dieser Elemente. Elemente der Algebra werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet, während die Darstellungen der Elemente mit den entsprechenden lateinischen Großbuchstaben gekennzeichnet werden.

Definition: Seien $t_1 \dots t_n$ die Basiselemente der Lie-Algebra \mathfrak{g} . Der Kommutator je zweier dieser Basiselemente kann (natürlich) wieder als Linearkombination der Basiselemente geschrieben werden:

$$[t_a, t_b] = f_{ab}^c t_c. \tag{12}$$

Dabei heißen die f_{ab}^c **Strukturkonstanten** der Lie-Algebra. Da für die Basiselemente die Jacobi-Identität (4) gilt, ergibt sich für die Strukturkonstanten:

$$f_{ab}^l f_{lc}^n + f_{bc}^l f_{la}^n + f_{ca}^l f_{lb}^n = 0 \tag{13}$$

Definition: Sei \mathfrak{g} die Lie-Algebra der Lie-Gruppe G . Dann gilt:

- \mathfrak{g} ist abelsch $\Leftrightarrow f_{ab}^c = 0$
- $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ist eine *Unteralgebra*, wenn $[h, h'] \in \mathfrak{h} \quad \forall h, h' \in \mathfrak{h}$
- $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ist eine *invariante Unteralgebra*, wenn $[g, h] \in \mathfrak{h} \quad \forall h \in \mathfrak{h}$ und $\forall g \in \mathfrak{g}$
- \mathfrak{g} ist *einfach*, wenn die einzigen invarianten Unteralgebren 0 und \mathfrak{g} sind.
- \mathfrak{g} ist *halbeinfach*, wenn es keine invariante abelsche Unteralgebra gibt.

Korollar: Alle halbeinfachen Lie-Algebren können aus einfachen Lie-Algebren zusammengesetzt werden.

2.1.4 Adjungierte Darstellung

Für jede Lie-Algebra existiert eine Matrixdarstellung. Diese Matrizen wirken auf einen Vektorraum V (zum Beispiel die Matrizen aus $SO(3)$ auf die Drehimpulsvektoren). Die Elemente des Vektorraumes V können Vektoren aus \mathbb{R}^n oder andere höhere Tensoren sein, zum Beispiel quadratische $n \times n$ -Matrizen aus \mathbf{R}^{n^2} .

Diejenige Darstellung von \mathfrak{g} , die auf die Lie-Algebra selbst wirkt, nennt man die **adjungierte Darstellung**.

Zunächst läßt sich die Adjunktion bezüglich der Gruppenverknüpfung $[\cdot, \cdot]$ aber ohne jegliches Wissen über eine Darstellung definieren:

Definition: Die natürliche Wirkung der Lie-Algebra \mathfrak{g} auf den Vektorraum \mathfrak{g} definiert eine Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathbf{ad} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (a, b) &\longmapsto \mathbf{ad}_a(b) = [a, b]. \end{aligned} \quad (14)$$

Diese Abbildung heißt die Adjunktion. Jedem Element y aus der Lie-Algebra \mathfrak{g} ist somit eine lineare Abbildung \mathbf{ad}_y zugeordnet:

$$y \longmapsto \mathbf{ad}_y. \quad (15)$$

Daß \mathbf{ad} eine Darstellung ist, läßt sich leicht zeigen. Seien (beispielsweise, die anderen Behauptungen lassen sich genauso einfach zeigen) $w, x, y \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{ad}_x, \mathbf{ad}_y](w) &= \mathbf{ad}_x(\mathbf{ad}_y(w)) - \mathbf{ad}_y(\mathbf{ad}_x(w)) \\ &= \mathbf{ad}_x([y, w]) - \mathbf{ad}_y([x, w]) \\ &= [x, [y, w]] - [y, [x, w]] = [x, [y, w]] + [y, [w, x]] \\ &= -[w, [x, y]] = [[x, y], w] = \mathbf{ad}_{[x, y]}(w) \end{aligned} \quad (16)$$

Als Beispiel soll nun die adjungierte Darstellung der Erzeuger von $SO(3)$ berechnet werden. Dabei muß die Lie-Algebra über \mathbb{C} definiert sein, damit die komplexen Kombinationen $t_{\pm} = t_x \pm it_y$ gebildet werden können. Die Vertauschungsrelationen der Generatoren t_z, t_+, t_- sind durch die folgende Tabelle gegeben:

	t_+	t_-	t_z
t_+	0	$2t_z$	$-t_+$
t_-	$-2t_z$	0	t_-
t_z	t_+	$-t_-$	0

Gesucht ist also eine Darstellung der Generatoren in einer Basis, die aus t_+, t_-, t_z besteht. Damit ergibt sich zum Beispiel für die zweite Spalte der adjungierte Darstellung von t_+ :

$$[t_+, t_-] = 0 \cdot t_+ + 0 \cdot t_- + 2 \cdot t_z \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Die gesamte Darstellung ist dann durch

$$\mathbf{ad}_{t_+}(\cdot) = [t_+, \cdot] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{ad}_{t_-}(\cdot) = [t_-, \cdot] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (19)$$

$$\mathbf{ad}_{t_z}(\cdot) = [t_z, \cdot] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

gegeben.

Korollar: Durch

$$g \cdot t_i \cdot g^{-1} = t_j \mathcal{D}_i^j(g) \quad (21)$$

wird ebenfalls die adjungierte Darstellung der Gruppe G definiert.

2.1.5 Killing-Form

Definition: Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra und seien weiterhin $a, b \in \mathfrak{g}$. Dann ist die **Killing-Form** als

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{ad}_a, \mathbf{ad}_b) \quad (22)$$

definiert. Im allgemeinen ist die Killing-Form nicht positiv definit und deswegen kein Skalarprodukt. Für halbeinfache Lie-Algebren jedoch ist sie positiv definit und ist somit ein Skalarprodukt. Wegen der zyklischen Eigenschaft der Spur ist die Killing-Form symmetrisch:

$$\gamma_{ij} = \mathrm{Tr}(\mathcal{D}(t_i), \mathcal{D}(t_j)) = \gamma_{ji}. \quad (23)$$

In der adjungierten Darstellung ist γ ein invarianter symmetrischer Tensor.

Satz: \mathfrak{g} ist genau dann halbeinfach, wenn $\det \gamma \neq 0$ ($\Leftrightarrow \gamma^{-1}$ existiert und $\gamma^{ik}\gamma_{kj} = \delta^i_j$).

Korollar: Indizes der Strukturkonstanten können mit Hilfe von γ gehoben und gesenkt werden.

2.1.6 Cartan Unteralgebra

Definition: Die **Cartan-Unteralgebra** \mathfrak{h} einer halbeinfachen Lie-Algebra \mathfrak{g} ist die maximale abelsche Unteralgebra, die ein reguläres¹ Element enthält.

Damit ist $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\langle h^1 \dots h^r \rangle_{\mathbb{K}}$ mit $r \in \mathbb{N}$. Alle h^i sind linear unabhängige Vektoren in \mathfrak{h} (und damit in \mathfrak{g}) und $[h^i, h^j] = 0 \forall i, k = 1, \dots, r$. Man wählt die Cartan-Unteralgebra meistens so, daß $\mathrm{Tr}(h_i h_j) = \delta_{ij}$. Wählt man ein Element g aus \mathfrak{g} und transformiert alle Elemente der Cartan-Unteralgebra gemäß

$$gh_1 g^{-1}, gh_2 g^{-1}, \dots, gh_r g^{-1}, \quad (24)$$

so erhält man erneut eine Cartan-Unteralgebra. Für kompakte Gruppen sind alle möglichen Cartan-Unteralgebren isomorph und haben die gleiche Dimension.

¹Für generische Elemente $h \in \mathfrak{g}$ hat der Kern von \mathbf{ad}_h , die Kommutante von h , die minimale Dimension r ; solche Elemente heißen **regulär**. Es kann spezielle (nichtreguläre) Elemente geben, für die $\dim \ker \mathbf{ad}_h > r$.

Definition: Die Dimension der Cartan-Unteralgebra gibt den **Rang** der Gruppe an:

$$\dim \mathfrak{h} = \text{rank } \mathfrak{g} = r. \quad (25)$$

Als Beispiel soll hier die die Gruppe $SU(3)$ mit der dazugehörigen Lie-Algebra betrachtet werden. Die hier verwendete Darstellung ist die sogenannte **Gell-Mann-Darstellung**. Die Generatoren ergeben sich aus $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ und sind mittels $\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ normiert:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

Eine Cartan-Unteralgebra besteht offensichtlich aus den diagonalen Generatoren T_3 und T_8 , die mit keinem der anderen Generatoren vertauschen. Die Dimension der Cartan-Unteralgebra ist somit 2, es handelt sich bei der $SU(3)$ also um ein Gruppe mit Rang 2.

2.2 Wurzeln und Gewichte

2.2.1 Wurzeln

Man betrachte nun die Einschränkung der Adjunktion auf die Cartan-Unteralgebra \mathfrak{h} :

$$\begin{aligned} \mathbf{ad} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (h, g) &\longmapsto \mathbf{ad}_h(g) = [h, g]. \end{aligned} \quad (27)$$

Für jedes $h \in \mathfrak{h}$ kann man nun nach den Eigenvektoren e_α der Abbildung \mathbf{ad}_h suchen. Jedes h kann als Linearkombination der kommutierenden Basiselemente h^1, \dots, h^r geschrieben werden:

$$h = \sum_{i=1}^r a_i h^i, \quad (28)$$

wobei $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}$. Weil die Elemente h^i der Cartan-Unteralgebra untereinander kommutieren und die Adjungierung eine lineare Operation ist, kommutieren auch die durch h^i induzierten Abbildungen \mathbf{ad}_{h^i} . Daraus folgt aber, daß die gesuchten Eigenvektoren e_α Eigenvektoren *aller* durch ein Element aus \mathfrak{h} induzierten adjungierten Abbildungen sind.

Korollar: Für einen gegebenen Eigenvektor $e_\alpha \in \mathfrak{g}$ der Abbildung \mathbf{ad}_h und für jedes $h \in \mathfrak{h}$ sind die Eigenwerte durch

$$\begin{aligned} \alpha : \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \mathbf{ad}_h(e_\alpha) &= \alpha(h)e_\alpha \end{aligned} \quad (29)$$

gegeben. Die $\alpha(h)$ sind Vektoren in \mathfrak{h}^* , dem zu \mathfrak{h} dualen Raum, dem Raum der lineare Funktionale auf \mathfrak{h} . Die Elemente der Cartan-Unteralgebra, h^1, \dots, h^r , werden durch das Bilden komplexer Kombinationen der Generatoren der Gruppe zu einer Basis vervollständigt. Die Kombinationen wählt man so, daß die entstehenden restlichen Basiselemente gerade die Eigenvektoren e_α sind:

$$[h^i, e^\alpha] = \alpha^i e^\alpha \quad \text{für } 1 \leq i \leq r. \quad (30)$$

Der reelle, nichttriviale r -dimensionale Eigenvektor α heißt **Wurzel** und e^α ist der dazugehörige Leiteroperator. Für die Wurzeln α gilt (ohne Beweis):

- Für jede Wurzel α gibt es (bis auf skalare Multiplikation) genau einen Aufsteiger E^α .
- Die einzigen Vielfachen einer Wurzel α , die wiederum eine Wurzel sind, sind $\pm\alpha$.
- Den Absteiger, also den zu $-\alpha$ gehörigen Operator, erhält man durch hermitesche Konjugation bezüglich der durch die Killing-Form definierten Metrik aus Gleichung (30):

$$e^{-\alpha} = e^{\alpha\dagger} \quad (31)$$

Die Anzahl der Wurzeln ergibt sich aus der Dimension der Lie-Algebra abzüglich des Ranges der Lie-Gruppe:

$$\# \text{ der Wurzeln} = \dim \mathfrak{g} - \text{rank } \mathfrak{g}. \quad (32)$$

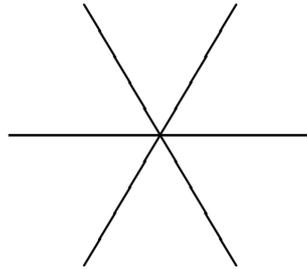
Welche Wurzeln ergeben sich aus der Gell-Mann-Darstellung (26)? Es gilt:

$$\begin{aligned} [\lambda_3, \lambda_1 \pm i\lambda_2] &= \pm 2(\lambda_1 \pm i\lambda_2) \\ [\lambda_8, \lambda_1 \pm i\lambda_2] &= 0 \\ \\ [\lambda_3, \lambda_4 \pm i\lambda_5] &= \pm(\lambda_4 \pm i\lambda_5) \\ [\lambda_8, \lambda_4 \pm i\lambda_5] &= \pm\sqrt{3}(\lambda_4 \pm i\lambda_5) \\ \\ [\lambda_3, \lambda_6 \pm i\lambda_7] &= \mp(\lambda_6 \pm i\lambda_7) \\ [\lambda_8, \lambda_6 \pm i\lambda_7] &= \pm\sqrt{3}(\lambda_6 \pm i\lambda_7). \end{aligned} \quad (33)$$

Daraus ergeben sich

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad (34)$$

als Wurzeln der Gell-Mann-Darstellung. Trägt man die Wurzeln in ein Diagramm ein, so erhält man das folgende Bild:



Betrachte nun den Kommutator zweier Leiteroperatoren:

$$[h^i, [e^\alpha, e^\beta]] = (\alpha^i + \beta^i)[e^\alpha, e^\beta] \quad (35)$$

$$\begin{aligned} [e^\alpha, e^\beta] &= \varepsilon(\alpha, \beta)e^{\alpha+\beta}, \text{ wenn } \alpha + \beta \text{ eine Wurzel ist} \\ &= 2\alpha_i \cdot h^i / \alpha^2, \text{ wenn } \alpha = -\beta \\ &= 0 \text{ sonst} \end{aligned} \quad (36)$$

Die Basis, die sich aus dieser Wahl der Elemente h^i und e^α mit der genannten Normierung ergibt, heißt **Cartan-Weyl-Basis**.

Betrachtet man die Elemente e^α , $e^{-\alpha}$ und $\alpha \cdot h$, so erinnert die Struktur stark an die durch $SO(3)$ induzierte Algebra (t_z, t_+, t_-) . Es gilt:

$$[\alpha \cdot h, e^{\pm\alpha}] = \pm\alpha^2 e^{\pm\alpha}. \quad (37)$$

Aus der Theorie des Drehimpulses ist bekannt, daß der Operator $2t_z$ in unitären Darstellungen nur ganzzahlige Eigenwerte haben kann. (Dies wird zum Beispiel in Cahn, Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations, Kapitel I, gezeigt.). Die Operatoren t_+ und t_- können mit den Aufsteigern und Absteigern e^α und $e^{-\alpha}$ identifiziert werden. In diesem Sinne definiert man einen Operator (was die Normierung in (36) erklärt)

$$h^\alpha = 2 \frac{\alpha \cdot h}{\alpha^2}, \quad (38)$$

der ganzzahlige Eigenwerte besitzt und

$$[h^\alpha, e^\alpha] = \pm 2e^{\pm\alpha} \quad (39)$$

erfüllt. Weiterhin gilt dann:

$$[h^\alpha, e^\beta] = 2 \frac{\beta \cdot \alpha}{\alpha^2} e^\beta \quad (40)$$

Das hier verwendete Skalarprodukt zwischen den Wurzeln α und β ist mittels $\alpha \cdot \beta = \text{Tr}(\mathbf{ad}_{h^\alpha}, \mathbf{ad}_{h^\beta})$ über die Killingform definiert.²

Sei $|\mu\rangle$ ein Eigenzustand des Operators h^α mit ganzzahligem Eigenwert m . Dann gilt:

$$h^\alpha e^\beta |\mu\rangle = \left(m + 2 \frac{\beta \cdot \alpha}{\alpha^2}\right) e^\beta |\mu\rangle. \quad (41)$$

Somit ist $e^\beta |\mu\rangle$ wieder ein Eigenzustand von h^α mit dem Eigenwert $\left(m + 2 \frac{\beta \cdot \alpha}{\alpha^2}\right)$ - dieser muß aber wiederum ganzzahlig sein. Daraus ergibt sich das zentrale Resultat:

$$\boxed{2 \frac{\beta \cdot \alpha}{\alpha^2} \in \mathbb{Z}.} \quad (42)$$

Korollar: Gleichung (42) macht eine Aussage über die Winkel zwischen zwei Wurzeln. Aus der Schwartzschen Ungleichung

$$\alpha \cdot \beta = \|\alpha\| \cdot \|\beta\| \cos \vartheta \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\| \quad (43)$$

folgt:

$$4 \cdot \frac{\beta \cdot \alpha}{\alpha^2} \frac{\beta \cdot \alpha}{\beta^2} = \frac{4(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} = 4 \cos^2 \vartheta \leq 4. \quad (44)$$

Folgende Kombinationen sind daher möglich:

$2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2}$	$2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta^2}$	$4 \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2 \cdot \beta^2}$	$\frac{\alpha^2}{\beta^2}$	$\cos \vartheta(\alpha, \beta)$	ϑ
0	0	0		0	$\pm \frac{\pi}{2}$
± 1	± 1	1	1	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{2\pi}{3}$
± 1	± 2	2	2	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}$
± 1	± 3	3	3	$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{5\pi}{6}$
± 2	± 2	4	1		
± 1	± 4	4	4		

Die beiden letzten Zeilen geben keine gültigen Kombinationen an, da die beiden Wurzeln zueinander parallel sind. Überdies gilt in der letzten Zeile $\alpha = 2\beta$.

²Das so definierte Skalarprodukt ist identisch mit dem herkömmlichen Skalarprodukt zwischen Wurzelvektoren im weiter unten definierten Wurzelraum.

2.2.2 Weyl-Reflektion und Weyl-Gruppe

Sei $E^{\beta+m\alpha}$, $m \in \mathbb{Z}$ ein Leiteroperator. Aus der Existenz eines $\mathfrak{su}(2)$ Multiplets sowohl für E^α als auch für E^β folgt

$$2\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} + 2m = -2\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} \quad (45)$$

für einen ganzzahligen Wert von m . Daraus folgt, daß

$$\beta + m\alpha = \beta - 2\frac{(\alpha \cdot \beta)}{\alpha^2} \cdot \alpha \equiv \sigma_\alpha(\beta) \quad (46)$$

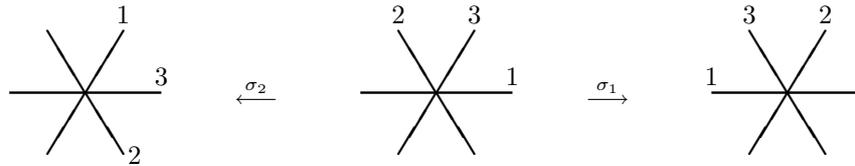
wiederum eine Wurzel ist.

Definition: Sei $\Phi = \text{span}\{\alpha, \beta, \dots\}$ der Raum der Wurzeln mit der Dimension $\text{rank } \mathfrak{g}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma : \Phi \times \Phi &\rightarrow \Phi \\ f : (\alpha, \beta) &\mapsto \sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{(\alpha \cdot \beta)}{\alpha^2} \cdot \alpha \end{aligned} \quad (47)$$

heißt **Weyl-Reflektion**. Die Gesamtheit dieser Reflektionen an Hyperebenen im Wurzelraum, die normal zu den Wurzeln sind, erzeugt die endliche **Weyl-Gruppe**, eine Untergruppe der Permutationsgruppe: $W(\mathfrak{g}) \subset S_{d-r}$.

Die Wurzeln der Gruppe $SU(3)$ verhalten sich unter Reflektionen an den zu Wurzel 1 und Wurzel 2 gehörigen Halbebenen wie folgt:



Definition: Im Raum der Wurzeln Φ kann eine Basis so gewählt werden, daß für alle $\alpha \in \Phi$ gilt:

$$\alpha = \sum_{i=1}^r n_i \alpha^{(i)}, \quad (48)$$

wobei $n_i \in \mathbb{Z}$ und entweder $n_i \geq 0 \quad \forall i$ oder $n_i \leq 0 \quad \forall i$. Im ersten Falle heißt α eine *positive* Wurzel (Bezeichnung: $\alpha > 0$), während sie im zweiten *negativ* ($\alpha < 0$) genannt wird. Diese Basis heißt eine Basis von **einfachen Wurzeln**. Eine Anwendung der Weyl-Gruppe auf eine Basis einfacher Wurzeln erzeugt eine ebensolche.

2.2.3 Cartan-Matrix und Dynkin-Diagramme

Definition: Die ganzzahligen Skalarprodukte

$$K_{ij} = 2\frac{\alpha^{(i)} \cdot \alpha^{(j)}}{\alpha^{(j)2}}, \quad 1 \leq i, j \leq r \quad (49)$$

bilden eine durch die Lie-Algebra \mathfrak{g} vollständig bestimmte $r \times r$ -Matrix, die **Cartan-Matrix** heißt.

Korollar: Es gilt:

$$K_{ij}K_{ji} = (2 \cos \vartheta_{ij})^2, \quad \text{so daß} \quad \cos \vartheta_{ij} = -\frac{1}{2}\sqrt{K_{ij}K_{ji}}. \quad (50)$$

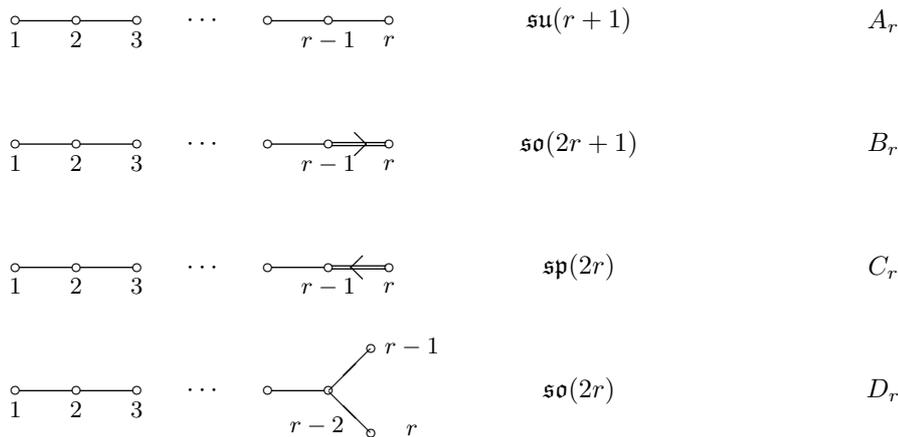
Weiterhin gilt

$$\frac{\alpha_{(i)}^2}{\alpha_{(j)}^2} = \frac{K_{ij}}{K_{ji}}. \quad (51)$$

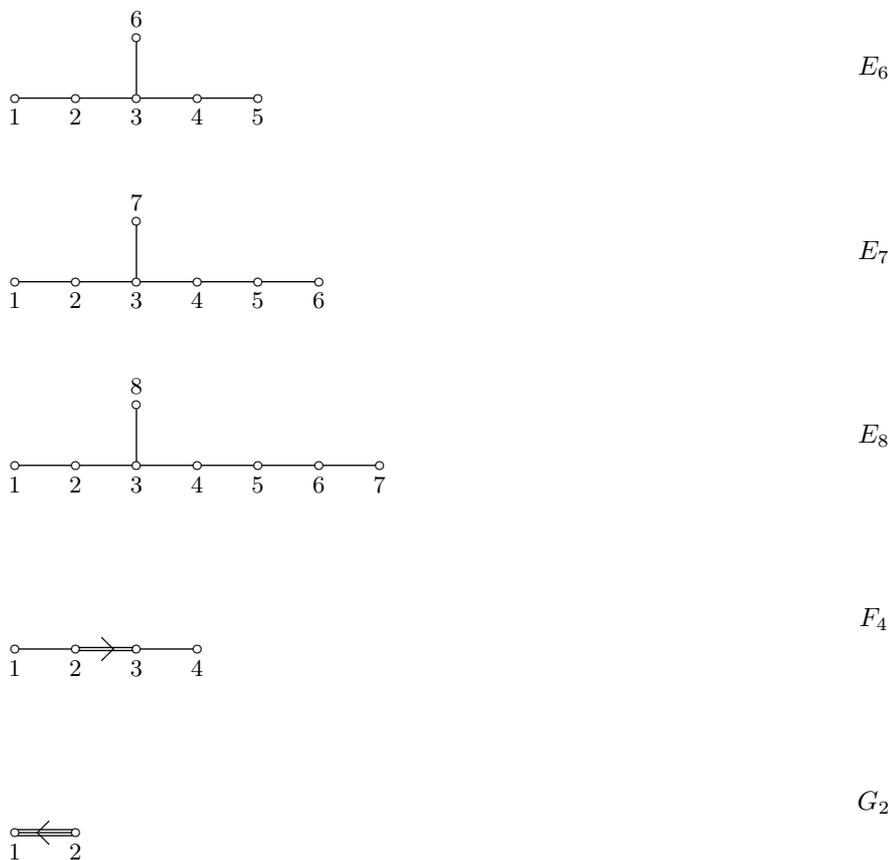
Definition: Ein *Dynkin-Diagramm* kodiert die in der Cartan-Matrix enthaltene Information graphisch. Es wird auf die folgende Art und Weise erzeugt:

- für jede einfache Wurzel wird ein Punkt gezeichnet
- die Punkte werden durch $\eta_{ij} = K_{ij}K_{ji}$ Linien verbunden.
- wenn $\eta_{ij} > 1$, so wird ein Pfeil von i nach j hinzugefügt, falls $\alpha_{(i)}^2 > \alpha_{(j)}^2$.

KLASSISCHE LIE-ALGEBREN



EXZEPTIONELLE LIE-ALGEBREN



Anhand der Diagramme sieht man die folgenden Identitäten sofort:

- $A_1 = B_1 \curvearrowright \mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$
- $B_2 = C_2 \curvearrowright \mathfrak{so}(5) = \mathfrak{sp}(4)$
- $A_3 = D_3 \curvearrowright \mathfrak{so}(6) = \mathfrak{su}(4)$
- $D_2 = A_1 \oplus A_1 \curvearrowright \mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$.

2.2.4 Gewichte

Definition: Sei \mathcal{D} eine endlichdimensionale Darstellung der Lie-Algebra \mathfrak{g} mit $\mathcal{D}(h) = H$ und $\mathcal{D}(e) = E$, in der die Elemente der Cartan-Unteralgebra, $H^i, 1 \leq i \leq r$ diagonal sind. Dann wird der r -dimensionale Vektor $|\mu\rangle$, der durch

$$H^i|\mu\rangle = \mu^i|\mu\rangle \quad (52)$$

gegeben ist, ein Gewichtsvektor zum Gewicht μ genannt.

Betrachte nun

$$H^i E^\alpha |\mu\rangle = [H^i, E^\alpha]|\mu\rangle + E^\alpha H^i |\mu\rangle = \alpha^i E^\alpha |\mu\rangle + \mu^i E^\alpha |\mu\rangle = (\mu^i + \alpha^i) E^\alpha |\mu\rangle. \quad (53)$$

Daraus folgt, daß entweder $E^\alpha |\mu\rangle = 0$ oder aber $(\mu + \alpha)$ ein Gewicht ist.

Satz: Sei $|\mu\rangle$ ein Gewichtsvektor zum Gewicht μ . Wenn $E^\alpha |\mu\rangle \neq 0$, dann ist $E^\alpha |\mu\rangle$ ebenfalls ein Gewichtsvektor, und zwar zum Gewicht $(\mu + \alpha)$. Dies unterstreicht die Bezeichnung der E^α und $E^{-\alpha}$ als Leiteroperatoren.

Definition: Ein Zustand $|\lambda\rangle$ heißt *Zustand des höchsten Gewichtes*, wenn λ ein Gewicht ist, aber $\lambda + \alpha$ für $\forall \alpha > 0$ nicht.

Alternative Definition: Sei ρ die halbe Summe aller positiven Wurzeln, d.h. $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$. Dann ist die *Höhe* eines Gewichtes durch $h(\mu) = \mu \cdot \rho$ gegeben. Ein Gewicht λ ist genau dann ein höchstes Gewicht, wenn $h(\lambda)$ maximal ist.

Satz: (ohne Beweis) Das höchste Gewicht λ ist (bis auf einen skalaren Faktor) eindeutig, wenn die Darstellung irreduzibel ist.

Korollar: Wurzeln sind die Gewichte der adjungierten Darstellung.

Korollar: Die Gewichte einer Darstellung treten in Reihen $\mu + p\alpha, \dots, \mu, \dots, \mu - m\alpha$ auf. Dabei bezeichnet $\mu + p\alpha$ das höchste Gewicht, während $\mu - m\alpha$ das niedrigste Gewicht ist (für $\alpha > 0$). Die Differenz $m - p$ kann wie folgt bestimmt werden:

$$m - p = 2 \frac{\mu \cdot \alpha}{\alpha^2}. \quad (54)$$

Sei nun die Anzahl der Gewichte, $p + m + 1$, ungerade. Dann gibt es ein zentrales Gewicht μ_0 für das $\mu_0 \cdot \alpha = 0$ und $p = m$. Man kann zeigen, daß die Gewichte innerhalb der Wurzelreihe untereinander über die folgende Symmetrie verknüpft sind (das gilt natürlich auch für gerade Anzahlen von Elementen in der Reihe):

$$\mu \rightarrow \mu - 2 \frac{\mu \cdot \alpha}{\alpha^2}. \quad (55)$$

Daraus folgt aus dem Vergleich mit (47):

Korollar: Die Gewichte einer Darstellung permutieren unter der Weyl-Gruppe $W(\mathfrak{g})$. Speziell gilt:

$$\sigma_\alpha(\mu) = \mu - 2 \frac{(\alpha \cdot \mu)}{\alpha^2} \cdot \alpha \text{ ist wieder ein Gewicht.} \quad (56)$$

Weiterhin gilt dann:

Korollar:

$$2 \frac{(\alpha \cdot \mu)}{\alpha^2} \in \mathbb{Z}. \quad (57)$$

2.2.5 Wurzel- und Gewichtsgitter

Definition: Das **Wurzelgitter** einer Lie-Gruppe G ist durch ganzzahlige Linearkombinationen der einfachen Wurzeln gegeben:

$$\Lambda_R(\mathfrak{g}) = \left\{ \sum_i n_i \alpha_{(i)}, n_i \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (58)$$

Die Menge der einfachen Wurzeln ist eine Basis des Wurzelgitters.

Definition: Die zur Basis der einfachen Wurzeln reziproke Basis, die **fundamentalen Gewichte** $\lambda_{(i)}$, bilden eine Basis für das **Gewichtsgitter** Λ_W . Jeder Punkt des Gewichtsgitters kann also als

$$\lambda = \sum_i n_i \lambda_{(i)} \quad (59)$$

dargestellt werden.

Korollar: Aus (42) und (57) folgt, daß $\Lambda_R(\mathfrak{g}) \subset \Lambda_W(\mathfrak{g})$. Jede Wurzel ist also ein Gewicht.

Korollar: Das Zentrum einer Gruppe ist wird mittels

$$\mathcal{Z}(G) = \{z | zg = gz \ \forall g \in G\} \quad (60)$$

definiert. Für eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe G mit Lie-Algebra \mathfrak{g} ergibt sich das Zentrum als Quotient aus Gewichts- und Wurzelgitter:

$$\frac{\Lambda_W(\mathfrak{g})}{\Lambda_R(\mathfrak{g})} = \mathcal{Z}(G). \quad (61)$$

2.3 TensorDarstellungen und Untergruppenzerlegung

Die Definition des Begriffes „Darstellung“ findet sich in (11). Der Vektorraum V , auf den eine Darstellung $\mathcal{D}(g)$ wirkt, heißt **Darstellungsraum** und man sagt, daß der Darstellungsraum die Darstellung **trägt**. Gewöhnlich werden irreduzible Darstellungen entweder durch die Angabe der Dimension des Darstellungsraumes, oder aber, bei TensorDarstellungen, durch Angabe der Anzahlen der symmetrischen und antisymmetrischen Indizes der Elemente aus V gekennzeichnet.

Sollen sich zum Beispiel Elemente aus \mathbb{C}^3 unter der Gruppe $SU(3)$ transformieren, so müssen die Generatoren als 3×3 -Matrizen dargestellt werden. Diese fundamentale (s.u.) Darstellung der $SU(3)$ hat die Dimension 3, denn es gibt genau drei linear unabhängige Elemente in \mathbb{C}^3 . Ein Vektor aus \mathbb{C}^3 hat einen Index. Diese Darstellung wird mit **3** bezeichnet. Allerdings gibt es für $SU(3)$ noch eine weitere dreidimensionale Darstellung, die ebenfalls auf Elemente aus \mathbb{C}^3 wirkt. Diese heißt antifundamentale Darstellung und wird mit $\bar{\mathbf{3}}$ bezeichnet.

Die adjungierte Darstellung der $SU(3)$ wirkt auf den Raum der Lie-Algebra \mathfrak{g} selbst, also einen 8-dimensionalen Vektorraum und wird daher mit **8** bezeichnet. Die Generatoren in der adjungierten Darstellung sind deshalb 8×8 -Matrizen. Die Anzahl der unabhängigen Elemente eines spurfreien Rang-2-Tensors

in N Dimensionen ist durch $N^2 - 1$ gegeben; dies liefert für $N = 3$ natürlich auch die richtige Anzahl. Indizes an Objekten des Darstellungsraumes, die sich unter der fundamentalen bzw. antifundamentalen Darstellung transformieren, werden unten bzw. oben notiert. So schreibt man für Elemente aus \mathbb{C}^3 , die sich unter $\mathbf{3}$ transformieren, v_μ , während diejenigen, die sich unter $\bar{\mathbf{3}}$ transformieren, mit v^μ notiert werden. Mit Hilfe des N -dimensionalen total antisymmetrischen Tensors lassen sich n obere Indizes in $N - n$ untere umwandeln. Die Objekte, auf die die adjungierte Darstellung wirkt, haben die Struktur $v_\mu{}^\nu$ (vgl. Gleichung (74) weiter unten.). In $N = 3$ Dimensionen gilt dann $v_\mu{}^\nu = \varepsilon^{\nu\rho\sigma} v_{\mu\rho\sigma}$. In Polchinskis und Zees Büchern wird oftmals noch eine weitere Kennzeichnung für Darstellungen verwendet. Sie bezieht sich ausschließlich auf *untere* Indizes: eine total antisymmetrische Tensordarstellung mit n unteren Indizes wird mit $[n]$ bezeichnet, während eine symmetrische, spurfreie Darstellung mit n (unteren) Indizes die Bezeichnung $\{n\}$ erhält. Diese Art der Kennzeichnung hat Grenzen: die adjungierte Darstellung der $SU(3)$ mit unteren Indizes, $v_{\mu\rho\sigma}$, ist weder total antisymmetrisch noch spurfrei symmetrisch in ihren drei Tensorindizes, damit läßt sie sich auch nicht in der eben beschriebenen Art und Weise darstellen. Weiterhin ist die Angabe der Dimension des Darstellungsraumes nicht eindeutig (es gibt zwei dreidimensionale Darstellungen der $SU(3)$, $\mathbf{3}$ und $\bar{\mathbf{3}}$). Der Ausweg ist der folgende:

Satz: Darstellungen sind *eindeutig* durch die Angabe ihres höchsten Gewichtes gekennzeichnet.

Die höchsten Gewichte können mit den sogenannten Dynkin-Labels (oder Dynkin-Koeffizienten) ausgedrückt werden:

Definition: Seien $\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(r)}$ eine Basis einfacher Wurzeln und λ das höchste Gewicht einer irreduziblen Darstellung. Dann wird λ eindeutig durch die Angabe der nichtnegativen ganzen Zahlen

$$\Lambda_i = 2 \frac{\lambda \cdot \alpha_{(i)}}{\alpha_{(i)}^2} \quad (62)$$

spezifiziert.

Korollar: Eine Darstellung heißt *fundamental*, wenn für genau ein i gilt $\Lambda_i = 1$ und $\Lambda_j = 0 \forall j \neq i$. Dieser Formalismus, das Ausrechnen der Gewichte und das Bestimmen der Dimension einer Darstellung soll im Folgenden am Beispiel der Darstellungen von $SU(3)$ geschehen.

2.3.1 fundamentale Darstellungen von $SU(3)$

Um die Rechnungen in diesem Abschnitt übersichtlich zu halten, sollen zukünftig die folgenden *normierten* einfachen Wurzeln verwendet werden:

$$\alpha_{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \alpha_{(2)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{und} \quad \alpha_{(3)} = (1, 0). \quad (63)$$

Dies hat den Vorteil, daß in allen Gleichungen $\alpha^2 = 1$ gilt und somit das Teilen durch den Betrag der Wurzel (wie in $2 \frac{\lambda \cdot \alpha_{(i)}}{\alpha_{(i)}^2}$) entfallen kann. Diese Wurzeln sind Eigenfunktionale zu der in Gleichung (26) gegebenen Gell-Mann-Darstellung. Da die fundamentalen Gewichte dual zu den einfachen Wurzeln sind, ergeben sie sich aus

$$\begin{aligned} 2\mu_{(1)} \cdot \alpha_{(1)} &= 1, & 2\mu_{(1)} \cdot \alpha_{(2)} &= 0 \\ 2\mu_{(2)} \cdot \alpha_{(1)} &= 0, & 2\mu_{(2)} \cdot \alpha_{(2)} &= 1 \end{aligned} \quad (64)$$

zu

$$\mu_{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad \mu_{(2)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right). \quad (65)$$

Zunächst soll die Darstellung betrachtet werden, die durch das Gewicht $\mu_{(1)}$ definiert wird ($\mu_{(1)}$ ist gerade ein höchstes Gewicht). Dies ist eine fundamentale Darstellung. Der zu $\mu_{(1)}$ gehörige Vektor ergibt sich mit:

$$\frac{1}{2}\lambda_3|\mu_{(1)}\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |\mu_{(1)}\rangle = \frac{1}{2}|\mu_{(1)}\rangle \quad (66)$$

$$\frac{1}{2}\lambda_8|\mu_{(1)}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} |\mu_{(1)}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}|\mu_{(1)}\rangle \quad (67)$$

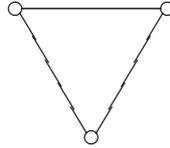
zu

$$|u\rangle = |\mu_{(1)}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Durch Anwendung der Leiteroperatoren ergeben sich die beiden anderen möglichen Zustände zu

$$\begin{aligned} |s\rangle &\rightarrow \mu_{(1)} - \alpha_{(1)} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ und} \\ |d\rangle &\rightarrow \mu_{(1)} - \alpha_{(1)} - \alpha_{(2)} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right). \end{aligned} \quad (69)$$

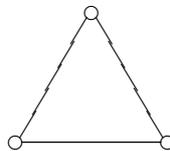
Diese Darstellung heißt Quarkdarstellung und ist die $\mathbf{3}$ der Gruppe $SU(3)$. In der Sprache der Dynkin-Labels handelt es sich um die $(1, 0)$ -Darstellung. Im Quarkmodell bezeichnen die Eigenwerte von $\frac{1}{2}\lambda_3$ und $\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$ die 3-Komponente des Isospins und die Hyperladung. Die Namen der Vektoren sind nicht zufällig gewählt, diese Zustände entsprechen dem up-, strange- und dem down-quark. Die folgende Zeichnung zeigt das Gewichtsdiagramm der Quarkdarstellung:



Welche Darstellung wird nun durch das höchste Gewicht $\mu_{(2)}$ definiert? Wiederum findet man drei Vektoren, die die folgenden Gewichte haben:

$$\begin{aligned} |\mu_{(2)}\rangle &= |\bar{u}\rangle \rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \\ |\mu_{(2)} - \alpha_{(2)}\rangle &= |\bar{s}\rangle \rightarrow \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ |\mu_{(2)} - \alpha_{(2)} - \alpha_{(1)}\rangle &= |\bar{d}\rangle \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right). \end{aligned} \quad (70)$$

Dies ist die sogenannte Antiquark-Darstellung, $\bar{\mathbf{3}}$ oder, nach dem höchsten Gewicht, $(0, 1)$, deren Gewichtsdiagramm wie folgt aussieht (dies ist das konjugierte Diagramm zur Darstellung der $\mathbf{3}$):



2.3.2 Höhere Darstellungen

Höhere Darstellungen werden konstruiert, indem man von Gewichten ausgeht, die durch

$$\mu = \Lambda_1 \mu^{(1)} + \Lambda_2 \mu^{(2)} \quad (71)$$

gegeben sind. Für die Gewichtszustände, die man aus diesem höchsten Gewicht erhalten kann, gilt:

- Die Leiteroperatoren $E^{-\alpha^{(1)}}$ und $E^{-\alpha^{(2)}}$ können höchstens Λ_1 bzw. Λ_2 mal angewendet werden. Daraus ergibt sich ein Teil der Berandung des Gewichtsdiagramms; der Rest kann aus der Weyl-Symmetrie erzeugt werden.
- Alle Zustände, die konstruiert werden können, haben die allgemeine Form $E^{-\alpha^{(1)}} \dots E^{-\alpha^{(n)}} |\mu\rangle$. Alle Operatoren $E^{\alpha^{(1)}}$, die man sich in der Reihe vorstellen könnte, würden nach rechts getauscht und würden auf $|\mu\rangle$ angewendet null ergeben. Damit können in den Gewichtsdiagrammen keine Zick-Zack-Ränder auftreten, sie sind sämtliche konvex.
- Ein Zustand ist entartet, wenn er durch zwei linear unabhängige Kombinationen von Leiteroperatoren aus dem höchsten Gewicht erzeugt werden kann. Ergibt sich zum Beispiel das gleiche Gewicht durch Anwendung von $E^{-\alpha^{(1)}} E^{-\alpha^{(2)}}$ und $E^{-\alpha^{(2)}} E^{-\alpha^{(1)}}$, so ist dieser Zustand zweifach entartet.

Es gibt eine „Daumenregel“ für den Grad der Entartung eines Gewichtes: Die Entartung nimmt mit jeder Schicht nach innen jeweils um eine Einheit zu, solange die Kontur hexagonal ist. Wird die Kontur allerdings trigonal, so ändert sich die Entartung nicht mehr.

2.3.3 Tensorprodukte (direkte Produkte)

Um die Zustände von Mehrteilchensystemen zu klassifizieren, versucht man diese durch direkte Produkte der fundamentalen identischen Bausteine zu erzeugen. Im Rahmen der Gruppe $SU(2)$ kann man eine Darstellung $j_1 \times j_2$ in irreduzible Darstellungen j_3 mit $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$ ausreduzieren. Die Eigenwerte der kombinierten Darstellung ergeben sich dann aus der Summe der Eigenwerte der einzelnen Darstellungen. (↗Auswahlregeln)

Exakt diese Regel bleibt (natürlich) auch bei höheren Gruppen erhalten:

Satz: Die möglichen Gewichtszustände einer Produktdarstellung ergeben sich aus der Addition der Gewichte der Einzeldarstellungen. Tritt ein Gewicht der Produktdarstellung als Summe der Gewichte der einzelnen Darstellungen mehrfach auf, so entspricht sein Entartungsgrad der Summe der Entartungsgrade aller Einzeldarstellungen, die auf dieselbe Summe führen. Damit erhält man ein Gewichts- und Entartungsdiagramm der Produktdarstellung.

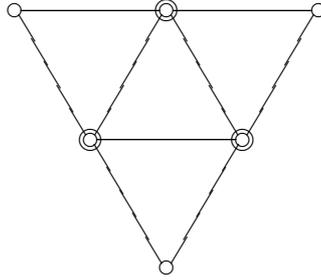
Betrachte nun das Produkt zweier fundamentaler Darstellungen der Gruppe $SU(3)$, $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$. Die sich ergebenden Gewichte sind

$$\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^*, \left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^*, \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^*, \left(0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad (72)$$

wobei ein * eine zweifache Entartung markiert. Das höchste Gewicht ist $\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, das höchste Gewicht der Darstellung $(2, 0)$, der $\mathbf{6}$ von $SU(3)$. Da die Gewichte der $\mathbf{6}$ alle einfach entartet sind, bleiben nach Wegnahme all dieser die Gewichte mit * zurück. Dies sind aber gerade die Gewichte der $\bar{\mathbf{3}}$ von $SU(3)$, so daß man erhält:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}. \quad (73)$$

Dies läßt sich auch gut am folgenden Gewichtsdiagramm sehen



wobei die zweifach entarteten Gewichte mit einem doppelten Kreis gekennzeichnet sind.

Das direkte Produkt der fundamentalen und antifundamentalen Darstellungen ergibt die adjungierte Darstellung in der direkten Summe mit der trivialen Darstellung:

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}. \quad (74)$$

Dieser Mechanismus wird deutlich komplexer, wenn man direkte Produkte höherer Gruppen betrachtet. Zum Beispiel ergibt das direkte Produkt zweier adjungierter Darstellungen der $SU(3)$:

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{27} \oplus \mathbf{10} \oplus \bar{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}. \quad (75)$$

2.3.4 Young-Tableaux

Young-Tableaux sind ein sehr eleganter Weg die Symmetrieeigenschaften einer Darstellung graphisch zu veranschaulichen. Die folgenden Ausführungen gelten für die Gruppen $SU(N)$, weil sich deren irreduzible Darstellungen immer als Tensoren mit unteren Indizes mit verschiedenen (Anti)symmetrien beschreiben lassen. (Ein oberer Index kann mit Hilfe des N -dimensionalen Levi-Civita-Symbols durch $N - 1$ untere Indizes beschrieben werden.) Mit geringfügigen Modifikationen sind Young-Tableaux aber auch im Rahmen anderer Arten von Lie-Gruppen anwendbar ($Sp(2N)$, $SO(N)$).

Folgende Eigenschaften der Objekte, auf die eine Darstellung wirkt, können mit Hilfe der Young-Tableaux einfach dargestellt oder herausgefunden werden:

- die (Anti-)symmetrie der Indizes
- die Anzahl der linear unabhängigen Objekte, auf die eine Darstellung wirkt (also die Dimension des Darstellungsraumes)
- die Reduktion des direkten Produktes zweier Darstellungen

Ein Young-Tableaux ist ein Bild, das eine irreduzible Darstellung durch Kästchen, die in Zeilen und Spalten angeordnet sind, darstellt. Dabei beginnt jede Spalte am oberen Ende des Tableaus und die Spaltenlänge darf von links nach rechts nicht zunehmen. Zum Beispiel:



Jedes Kästchen steht für einen Index. Um nun ein Element des Vektorraumes zu erhalten, auf den die Darstellung wirkt, nimmt man als Ausgangspunkt einen Tensor mit der richtigen Anzahl von Indizes, symmetrisiert die Indizes, die sich in der gleichen Zeile befinden und antisymmetrisiert dann die Indizes einer Spalte. Die längste Spalte einer $SU(N)$ -Darstellung darf wegen der Antisymmetrisierbarkeit nicht länger als $N - 1$ sein.

Die Dimension der Darstellung für ein gegebenes Tableau läßt sich mit folgender „Gebrauchsanweisung“ bestimmen:

- In das Kästchen in der linken oberen Ecke wird ein N geschrieben. Die restlichen Kästchen werden mit Zahlen gefüllt, die für jeden Schritt nach unten um eins abnehmen, aber für jeden Schritt nach rechts um eins zunehmen (hier für eine Darstellung von $SU(5)$):

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 7 & \\ \hline 3 & 4 & & & \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (77)$$

- In Gedanken wird in jedes Kästchen ein Haken (Γ) gezeichnet, der seine Ecke im Kästchen hat und dessen Schenkel nach rechts und nach unten zeigen.
- Die Dimension ist dann durch folgende Formel gegeben:

$$\text{Dimension} = \prod_{\text{alle Kästchen}} \frac{\text{Zahl im Kästchen}}{\text{Anzahl der Kästchen, die vom Haken geschnitten werden}} \quad (78)$$

Das direkte Produkt zweier Young-Tableaux $A \otimes B$ wird mit folgenden Regeln erhalten:

- Das Tableau B wird folgendermaßen mit Buchstaben gefüllt: in jedes Kästchen der ersten Zeile wird ein a geschrieben, in jedes Kästchen der zweiten Reihe ein b und so weiter.
- Nun werden zuerst die Kästchen a von rechts und unten an das Tableau A angefügt, an die entstehenden Diagramme dann die Kästchen b von rechts und von unten und so weiter. Zwei Tableaux, die die gleiche Form, aber unterschiedliche Buchstaben in korrespondierenden Kästchen haben, werden als unterschiedlich angesehen.
- Es darf jeder Buchstabe nur einmal pro Spalte vorkommen.
- Wenn man von rechts nach links und dann von oben nach unten liest (so wie im Hebräischen oder Arabischen), muß die Anzahl der a 's immer \geq der Anzahl der b 's sein, die Anzahl der b 's \geq der der c 's und so weiter.

Zum Beispiel gilt:

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & a & a \\ \hline b & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \quad (79)$$

Als Beispiel soll hier das direkte Produkt der adjungierten Darstellung der $SU(3)$ mit sich selbst betrachtet werden:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & a & a & b \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & & & \\ \hline b & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a & a \\ \hline & & & \\ \hline & & b & \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a & b \\ \hline & & & \\ \hline & & a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a & \\ \hline & & & \\ \hline a & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a & \\ \hline & & & \\ \hline & & a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a & \\ \hline & & & \\ \hline & & a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & a & \\ \hline & & & \\ \hline & & a & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline a & b \\ \hline \end{array} \quad (80)$$

Zuerst müssen diejenigen Tableaux entfernt werden, die einer der beiden letzten Bedingungen nicht genügen. Das sind jeweils die ersten Diagramm in der ersten, zweiten und dritten Zeile. Außerdem müssen die Tableaux, die sich im Rahmen der $SU(3)$ aufgrund zu vieler antisymmetrischer Indizes nicht realisieren lassen, weggelassen werden. (dritte und vierte Zeile letztes Diagramm). Ermittelt man nun die Dimensionen der Darstellungen ergibt sich die schon bekannte Relation:

$$\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = \mathbf{27} \oplus \mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{10}} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}. \quad (81)$$

Spalten der Länge N können in Young-Tableaux weggelassen werden, weil $\varepsilon_{12\dots N} = 1$. So gilt beispielsweise $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$. Dies ist eine generelle Regel: zwei Diagramme, die aneinandergesetzt ein Rechteck der Abmessung N Zeilen \times M Spalten, $M \in \mathbb{N}/\{0\}$ ergeben, sind zueinander dual und haben die gleiche Dimension. Dies beruht auf der Tatsache, daß man einen Index mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors durch $N - 1$ antisymmetrische Indizes ausdrücken kann. Zum Beispiel gilt für $N = 3$:

$$\overline{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \overline{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (82)$$

2.4 Literatur

Zahlreiche Quellen bieten Einführungen zur Theorie der Darstellung von Lie-Algebren. Die Inhalte dieser kleinen Einführung basieren größtenteils auf diesen Quellen.

- Unter <http://www-physics.lbl.gov/~rncahn/book.html> kann man das Buch „Semi-Simple Lie-Algebras and their representations“ von Robert N. Cahn herunterladen. (Englisch)
- Als Imperial College Preprint, 1982, erhält man eine ältere (und sehr gut erläuterte) Abhandlung über „Eichtheorien und Lie-Algebren mit einigen Anwendungen auf spontane Symmetriebrechung und integrable dynamische Systeme“ von David Olive. (Englisch)
- Ein Skriptum „Gruppentheorie und Quantenmechanik“ findet sich unter auf der Website von Prof. Dr. Jürgen Baacke www.physik.uni-dortmund.de/~baacke/gth.pdf (Deutsch)
- Eine kurze Übersicht über Lie-Algebren findet sich in Joseph Polchinskis „String Theory“, 2. Band, Kapitel 11.4 (Englisch)
- In Anthony Zees Buch „Quantum Field Theory in a nutshell“ gibt es einen Anhang B mit dem Titel „A Brief Review of Group Theory“. Dort wird vor allem auf die verschiedenen Tensorarstellung eingegangen. (Englisch)
- Ein weiteres, sehr umfassendes Buch ist Howard Georgi: „Lie-Algebras in Particle Physics“. Hier findet sich auch eine kurze (und mathematisch genaue) Einführung zu Young-Tableaux. (Englisch)
- Young-Tableaux im teilchenphysikalischen Umfeld sind ein Hilfsmittel, dessen Möglichkeiten nur sehr beschränkt ausgenutzt werden. Eine knappe, aber präzise Anleitung zum Umgang mit den Tableaux findet sich in Warren Siegel, „Fields“, einem Buch, das man unter

<http://insti.physics.sunysb.edu/~siegel/plan.html>

herunterladen kann. (Englisch)

- Sehr praxisbezogen führt J.J.Sakurai in seinem Buch „Quantum Mechanics“, Kapitel 6.5, in die Benutzung von Young-Tableaux ein. Dabei wird besonderer Wert auf $SU(2)$ und $SU(3)$ gelegt. Allerdings fehlt hier eine allgemeinere Betrachtung. (Englisch)
- Eine weitere, sehr ausführliche und dennoch praktische Einführung gibt es auf den Internetseiten der GSI. Speziell für den an Lie-Algebren Interessierten empfiehlt sich

<http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/relativity/node121.html>

Unter anderem finden sich dort die Quellen zu den Ausführungen über linksinvariante Vektorfelder. (Deutsch)

- Eine Ausführung zum Schurschen Lemma, die den Aspekt der notwendigen Existenz eines Eigenvektors der linearen Selbstabbildung beleuchtet, findet sich in „Geometrie der Relativität“ von Norbert Dragon, Seite 281, erhältlich unter

<http://www.itp.uni-hannover.de/~dragon/relativ.ps.gz>